Полные разбиения k-связного графа на части

Ю.М. Лифшиц*

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Математико-механический факультет

E-mail: lifts@mail.rcom.ru

В статье изучается разбиение графа набором разделяющих множеств. Найдена точная верхняя оценка количества получающихся частей. Исследована структура набора в случае достижения этой оценки. Кроме того, результат Д. В. Карпова о количестве частей в разбиении передоказан при более слабых предположениях о графе. В статье так же доказана Теорема о пограничных частях, дающая верхнюю оценку количества частей разбиения, граничащих с данной вершиной.

1 Введение

При изучении связности графа встает естественный вопрос: как выделить в k-связном графе подграфы большей связности и какую систему они образуют? В связном графе максимальное по включению подмножество вершин индуцирующее двусвязный подграф называется блоком. Их структура исследована достаточно полно. Можно упомянуть, например, [1, 2]. В работах [3, 4] были предприняты попытки обобщить основные результаты этой теории на графы большей связности. Ряд работ был посвящен трехсвязным блокам в двусвязных графах [5, 6, 7]. В работе [8], а затем и [9] вводятся новые методы разбиения k-связного графа на $k+1$-связные блоки. В работе [10] появляется понятие *части* разбиения графа по набору разделяющих множеств. Это понятие тесно связано с построением блоков в k-связном графе. В частности, любой блок k-связного графа можно представить как часть разбиения этого

*Рабата выполнена при содействии гранта "Государственная поддержка ведущих научных школ НШ-2203.2003.1"

графа *всеми* k-разделяющими множествами. Кроме того, в [10] при довольно сильных ограничениях на разделяющий набор и сам граф был получен очень интересный результат: оказывается набор из n разделяющих множеств делит граф не более чем на $2n$ частей.

Статья построена следующим образом: сначала мы введем основные понятия теории k-связных графов и приведем их простейшие свойства, которые понадобятся при доказательстве основных результатов. Затем мы докажем Теорему о пограничных частях, которая будет основным инструментом для получения оценок количества частей в разбиении. После этого будет получена Теорема о полном разбиении: пусть в некотором k-связный графе есть набор k-разделяющих множеств $\{A_1, \dots A_n\}$. Для каждого $1 \le i \le n$ обозначим через a_i количество частей, на которые множество A_i делит граф. Тогда весь набор делит граф не более чем на

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} [a_i > 2] + [\forall i \quad a_i > 2]$$

невырожденных частей.

В этой формуле [утверждение] - это нотация Айверсона (см. [11, 12]), т.е. результат этого выражения равен 1, если утверждение в квадратных скобках верно, и равен 0 в противном случае. Кроме того, мы увидим, что результат Д. В. Карпова из [10] о $2n$ частях является частным случаем этой теоремы. В следующем разделе будет описана структура разделяющего набора в случае полного разбиения. То есть в случае, когда число частей в разбиении графа достигает полученной нами верхней оценки. В последнем разделе мы докажем, что количество невырожденных частей в разбиении графа n разделяющими множествами не превосходит $2n$ при более слабых ограничениях на граф, чем в [10].

2 Основные понятия

Определение 1. Назовем простой (без петель и кратных ребер) граф *k-связным*, если при удалении любой $k-1$ вершины (и всех ребер, выходящих из этих вершин) граф остается связным.

Определение 2. Назовем подмножество вершин A графа *разделяющим*, если при удалении этих вершин граф перестает быть связным. Само удаление назовем разрезом графа по A (или A-разрезом). Соответственно, назовем подмножество вершин графа *m-разделяющим*, если оно разделяющее и состоит из m вершин.

В этой статье речь будет идти только о k-разделяющих множествах в k-связном графе.

Определение 3. Будем говорить, что разделяющее множество A *разделяет* набор вершин X, если при A-разрезе не все неудаленные вершины X окажутся в одной компоненте связности.

Теперь определим понятие части и укажем его основное свойство.

Определение 4. Пусть $\mathfrak{A}$ – набор разделяющих множеств графа G. Множество P из нескольких вершин графа назовем *частью* $\mathfrak{A}$*-разбиения*, если никакие две вершины из P нельзя разделить никаким множеством из набора $\mathfrak{A}$, но любая другая вершина графа может быть отделена от множества P разрезом по одному из множеств $\mathfrak{A}$.

В дальнейшем, слово *разбиение* всегда будет относится к набору разделяющих множеств, а *разрез* – к одному разделяющему множеству.

Пусть набор $\mathfrak{A}$ состоит только из одного разделяющего множества A, и пусть при A-разрезе граф распадается на компоненты связности $F_1, \ldots, F_l$. Тогда согласно нашему определению частями $\mathfrak{A}$-разбиения (A-разреза) будут множества $A \cup F_1, \ldots, A \cup F_l$.

Необходимо отметить, что если рассмотреть часть как отдельный граф (проведя между вершинами части те ребра, которые были в исходном графе), то он может оказаться несвязным.

Предложение 1. *Если Q - часть $\mathfrak{A}$-разбиения, то ее можно представить в виде*

$$Q = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} P_A,$$

где P_A - одна из частей A-разреза нашего графа.

Возьмем по одной части разреза по каждому из множеств $\mathfrak{A}$. Все такие выборки будем называть $\mathfrak{A}$*-комбинациями* или просто *комбинациями*. Тогда, другими словами, Предложение 1 говорит, что любая часть $\mathfrak{A}$-разбиения явлется пересечением частей какой-то комбинации. Доказательство Предложения 1 несложно и приведено в [10, Теорема 1]. Таким образом, общее количество частей в $\mathfrak{A}$-разбиении не превосходит произведения количеств частей в разрезах по каждому разделяющему множеству из $\mathfrak{A}$.

Теперь введем понятия границы и внутренности части, оперируя с которыми мы сможем получить основные результаты этой статьи.

Определение 5. *Границей* части $\mathfrak{A}$-разбиения P назовем множество тех вершин P, которые лежат хотя бы в одном из множеств $\mathfrak{A}$, а *размером* границы – их количество. Соответственно, *внутренностью* части назовем множество остальных вершины P.

Определение 6. Часть $\mathfrak{A}$-разбиения назовем *вырожденной*, если ее внутренность пуста.

Вырожденная часть разбиения не обязательно является пустым множеством. В следующем предложении дается основное свойство границы.

Предложение 2. *Если внутренность части не пуста, то ее граница является разделяющим множеством, отделяющем эту внутренность от остальных вершин графа.*

Это так же нетрудно проверить [10, Замечание к Определению 4]. Таким образом, для любого набора $\mathfrak{A}$ разделяющих множеств в k-связном графе граница любой невырожденной части $\mathfrak{A}$-разбиения состоит хотя бы из k вершин.

Теперь приведем последнее утверждение (нетрудное доказательство опустим), которое нам потребуется.

Предложение 3. *Пусть*

$$Q = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} P_A,$$

где P_A - одна из частей A-разреза нашего графа. Тогда если Q содержит хотя бы одну вершину, не лежащую ни в одном из множеств $\mathfrak{A}$, то Q - часть $\mathfrak{A}$-разбиения, причем невырожденная.

Другими словами, если пересечение частей какой-то комбинации содержит хотя бы одну вершину не из множеств $\mathfrak{A}$, то оно являеется частью разбиения, причем невырожденной.

3 Теорема о пограничных частях

Рассмотрим произвольную вершину y нашего графа. Для каждого разделяющего множества из $\mathfrak{A}$, содержащего y, возьмем количество частей, на которое оно режет граф. Сумму взятых чисел назовем *весом* вершины y относительно $\mathfrak{A}$.

Теорема 1. *Количество невырожденных частей $\mathfrak{A}$-разбиения, с которыми граничит (то есть входит в границу) произвольная вершина графа, не превосходит веса этой вершины относительно набора $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$, и A_i режет граф на a_i частей $(1 \leq i \leq n)$. Пусть вершина x принадлежит множествам $A_1, \ldots, A_m$ и не принадлежит остальным. Тогда нам нужно доказать, что эта вершина является граничной не более чем для $\sum_{i=1}^{m} a_i$ невырожденных частей $\mathfrak{A}$-разбиения.

Иными словами вес вершины y равен $\sum_{i=1}^{n} a_i[y \in A_i]$.

Докажем утверждение теоремы индукцией по m.

База $m = 1$: пусть множество A из набора $\mathfrak{A}$ делит граф на a частей. Вершина x принадлежит A и не принадлежит остальным множествам $\mathfrak{A}$. Будем рассматривать части $\mathfrak{A}$-разбиения в виде, представленном в Предложении 1. Заметим, что вершина x принадлежит всем a частям A-разреза, а для разрезов по каждому из остальных разделяющих множеств набора $\mathfrak{A}$ вершина x принадлежит только какой-то одной части. Таким образом, x принадлежит пересечению только a комбинаций. Следовательно x принадлежит (а значит и является граничной) не более чем a частям.

Переход: разберем сначала случай $m = n$, т.е. когда x принадлежит всем множествам $\mathfrak{A}$. Будем доказывать, что во всем $\mathfrak{A}$-разбиении не более, чем $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$ невырожденных частей, от противного. Предположим, что этих частей $a + b$, где $b > 0$. Обозначим через C объединение всех множеств $\mathfrak{A}$, через D – их пересечение. Пусть $d = |D|$. Оценим сумму размеров границ невырожденных частей $\mathfrak{A}$-разбиения (обозначим это число через T) двумя способами.

По индукционному предположению для каждой вершины из $C \setminus D$ количество частей, в границу которых она входит, не превосходит ее веса. Каждая вершина из D граничит не больше чем с $a+b$ невырожденными частями. Вес каждой вершины из D равен a. Таким образом, сумма размеров границ невырожденных частей $\mathfrak{A}$-разбиения превышает общий вес всех вершин не более чем на db. Сумма весов всех вершин равна $k\sum_{i=1}^{n} a_i = ka$, так как каждое множество A_i вносит в суммарный вес вершин C вклад, равный ka_i. Итак, $T \leq ka + db$.

С другой стороны, как уже было отмечено в Предложении 2, граница каждой невырожденной части состоит не менее чем из k вершин. Следовательно, $T \geq bk+ak$, откуда $d \geq k$, что противоречит определению d. Таким образом, всего невырожденных частей $\mathfrak{A}$-разбиения не больше a, следовательно и x граничит не более чем с a частями.

Разберем теперь случай $n > m$. Мы только что показали, что найдется не более $a = \sum_{i=1}^{m} a_i$ невырожденных частей $\mathfrak{B}$-разбиения ($\mathfrak{B} = \{A_1, \ldots, A_m\}$). Отсюда по Предложению 3 $\mathfrak{B}$-комбинаций, пересечение которых содержит хотя бы одну вершину, не лежащую ни в одном из множеств $\mathfrak{A}$, нйдется не более a . Как и в рассуждениях при доказательстве базы, вершина x принадлежит только какой-то одной части разреза по каждому из разделяющих множеств набора $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$. Следовательно, уже $\mathfrak{A}$-комбинаций, пересечение частей которых будет представлять невырожденную часть $\mathfrak{A}$-разбиения, содержащую x, будет не больше a. Таким образом, x входит в границу не более чем a невырожденных частей. □

4 Основная теорема

Для дальнейших рассуждений нам необходимо подробно изучить разбиение графа двумя разделяющими множествами. Сейчас мы введем набор понятий и обозначений ("клеточный язык"), которые будут использованы в доказательстве почти всех последующих утверждений.

Пусть A и B - k-разделящие множества, делящие граф соответственно на a и b частей. Обозначим части A-разреза через $P_1, \dots, P_a$, части B-разреза через $Q_1, \dots, Q_b$. Это значит, что при удалении множества A из графа он разделится на компоненты связности $P_1 \setminus A, \dots, P_a \setminus A$.

Нарисуем таблицу $(a+1) \times (b+1)$. Ее столбцы будут соответствовать множествам $A, P_1 \setminus A, \dots, P_a \setminus A$, строчки - $B, Q_1 \setminus B, \dots, Q_b \setminus B$. В каждую клетку "положим" вершины графа из пересечения множеств, соответствующих строке и столбцу этой клетки. Клетку будем называть *пустой*, если в ней не лежит ни одной вершины. В левой верхней клетке (будем называть ее *угловой*) будут лежать вершины множества $D = A \cap B$. Клетки левого (нулевого) столбца и верхней (нулевой) строчки будем называть *крайними*, остальные - *внутренними*. Будем говорить что внутренняя клетка *граничит* с самой верхней клеткой своего столбца, с самой левой клеткой своей строки и с угловой клеткой. Количество вершин в клетках зададим матрицей $\{g_{ij}\}$, где $0 \leq j \leq a$, $0 \leq i \leq b$.

Сформулируем в этих обозначениях Предложение 1: любая невырожденная часть $\{A, B\}$-разбиения есть объединение вершин какой-то непустой внутренней клетки и граничащих с ней крайних клеток. По Предложению 3, каждое такое объединение является невырожденной частью. Причем ее границей будут в точности вершины из крайних клеток, ведь это те вершины этой части, которые лежат в A или B. Внутренностью этой части будут вершины данной внутренней клетки. Согласно Предложению 2, общее количество вершин в клетках, граничащих с данной непустой внутренней клеткой, должно быть не меньше k. Это можно также сформулировать следующим образом:

$$1 \leq j \leq a, \quad 1 \leq i \leq b, \quad g_{ij} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad g_{00} + g_{0j} + g_{i0} \geq k.$$

Определение 7. Пусть A и B - k-разделяющие множества. Назовем часть B-разреза Q *дальней* для A, если существует не более одной части A-разреза P такой, что $P \cap Q$ содержит хотя бы одну вершину вне $A \cup B$. В противном случае будем называть Q *ближней*.

Переведем это определение на клеточный язык: часть Q_i - дальняя, если в строке $Q_i \setminus B$ не более одной непустой внутренней клетки, т.е. среди чисел $g_{i1}, \ldots, g_{ia}$ не более одного ненулевого.

Лемма 1. *Пусть A и B - k-разделящие множества, делящие граф соответственно на a и b частей, $a \geq 3$. Тогда среди частей B-разреза есть не более одной ближней для A.*

Доказательство. Будем доказывать эту лемму на клеточном языке, используя метод от противного. Пусть Q_1 и Q_2 - ближние части. Это значит, что в первой и второй строках нашей таблицы есть хотя бы по две непустых внутренних клетки. Отметим по непустой внутренней клетке в этих строках так, чтобы отмеченные клетки лежали в разных столбцах. Не умаляя общности можно считать, что это клетки $(1,1)$ и $(2,2)$. Введем обозначения для крайних клеток, которые граничат с выбранными. Пусть $A_1 = A \cap (Q_1 \setminus B)$, $A_2 = A \cap (Q_2 \setminus B)$, $B_1 = B \cap (P_1 \setminus A)$, $B_2 = B \cap (P_2 \setminus A)$, а также $D = A \cap B$.

Используя Предложение 2 в клеточной формулировке, получим, что $g_{00} + g_{01} + g_{10} \geq k$ и $g_{00} + g_{02} + g_{20} \geq k$. С другой стороны A и B - k-разделяющие множества, откуда $g_{00} + g_{10} + g_{20} \leq k$ и $g_{00} + g_{01} + g_{02} \leq k$. Следовательно,

$$g_{01} = g_{20}, \quad g_{10} = g_{02}, \quad g_{00} + g_{01} + g_{02} = g_{00} + g_{10} + g_{20} = k. \tag{1}$$

Вспомним теперь о том, что $a \geq 3$. Рассмотрим P_3 - еще одну часть A-разреза. Тогда $P_3 \setminus A$ – вершины одной из компонент связности, остающейся после удаления A. Следовательно $P_3 \setminus A$ (ребра проводим как в исходном графе) - связный граф. Более того, из любой вершины A есть ребро, ведущее в $P_3 \setminus A$, ведь иначе A не было бы минимальным по числу вершин разделяющим множеством. Из равенств (1) следует, что все вершины B лежат в $P_1 \cup P_2$, следовательно, их нет в $P_3 \setminus A$. Отсюда получаем, что $P_3 \setminus A$ лежит в одной компоненте связности после удаления B, более того, в этой же части лежат все вершины $A \setminus (A \cap B)$. Следовательно, либо A_1, либо A_2 пусто. Откуда $g_{10} = 0$ или $g_{20} = 0$, не умаляя общности можно считать, что верно второе. Тогда из (1) следует

$$g_{20} = g_{01} = 0, \quad g_{10} = g_{02}, \quad g_{00} + g_{10} = g_{00} + g_{02} = k. \tag{2}$$

Таким образом, все вершины B распределены между D и B_2. Теперь посмотрим на вторую строчку (т.е. $Q_2 \setminus B$) в свете только что полученной формулы (2). Кроме $(2,2)$ в ней должна быть еще одна непустая внутренняя клетка. Посмотрим на граничащие с ней крайние клетки: самая левая в строке – $A_2 = A \cap (Q_2 \setminus B)$ – пустая. Самая верхняя в столбце – это не D и не B_2 – следовательно, тоже пустая. Поэтому граница невырожденной части, соответствующей рассматриваемой внутренней клетке, состоит только из D. Но $|D| < k$ – и мы приходим к противоречию с Предложением 2 в клеточной форме. $\square$

Замечание. Почти такими же рассуждениями можно показать, что в условиях только что доказанной леммы среди частей A-разреза тоже не более одной ближней для B.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{A} = \{A_1, \dots A_n\}$ – набор k-разделяющих множеств k-связного графа. Для каждого $1 \le i \le n$ обозначим через a_i количество частей на которые множество A_i режет граф. Тогда весь набор разбивает граф не более чем на*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} [a_i > 2] + [\forall i \; a_i > 2] \tag{3}$$

невырожденных частей.

Доказательство. Будем доказывать теорему индукцией по количеству i, для которых $a_i > 2$, иначе говоря, индукцией по $\sum_{i=1}^{n}[a_i > 2]$.

База: В качестве базы рассмотрим два случая. Первый: $n = 1, a_1 > 2$, тогда у нас есть a_1 невырожденных частей A_1-разреза и это ровно тот результат, который дает формула (3). Второй случай: $a_1 = \dots = a_n = 2$. Пусть C – объединение множеств $\mathfrak{A}$. Вспомним Теорему о пограничных частях: количество частей, с которыми граничит данная вершина C, не превосходит веса этой вершины. Суммарный вес вершин C равен $k \sum_{i=1}^{n} a_i$. Размер границы каждой невырожденной части не меньше k. Следовательно, количество невырожденных частей не больше $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2n$, формула (3) доказана.

Переход: Пусть $\mathfrak{A}$ не описывается ни одним из двух только что разобранных случаев. Тогда $n \ge 2$ и есть i такое, что $a_i > 2$. Не умаляя общности можно считать, что $a_n > 2$. Применим для $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \setminus \{A_n\}$ индукционное предположение. Заметим, что формула (3) дает для $\mathfrak{A}$ результат на $a_n - 1$ больший, чем для $\mathfrak{A}'$. Докажем, что количество невырожденных частей в $\mathfrak{A}$-разбиении увеличилось не более чем на $a_n - 1$ по сравнению с $\mathfrak{A}'$.

По Предложению 1, каждая невырожденная часть $\mathfrak{A}'$-разбиения ($\mathfrak{A}$-разбиения) - пересечение какой-то $\mathfrak{A}'$-комбинации ($\mathfrak{A}$-комбинации). Если $\mathfrak{A}$-комбинация получается из данной $\mathfrak{A}'$-комбинации добавлением какой-то части A_n-разреза, будем говорить, что первая *выросла* из второй. Посмотрим, из чего выросли комбинации, соответствующие невырожденным частям $\mathfrak{A}$-разбиения.

Если $\mathfrak{A}'$-комбинация не соответствует никакой невырожденной части $\mathfrak{A}'$-разбиения, то ее пересечение (по Предложению 3) содержит только вершины из множеств $\mathfrak{A}'$. Следовательно, пересечение частей любой комбинации, которая вырастет из данной, может дать только вырожденную часть $\mathfrak{A}$-разбиения.

Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{A}'$-комбинация соответствует какой-то невырожденной части $\mathfrak{A}'$-разбиения и содержит хотя бы одну дальнюю часть для A_n. Тогда, по определению дальней части, к этой комбинации можно добавить не более одной части A_n-разреза так, чтобы пересечение полученной $\mathfrak{A}$-комбинации не лежало целиком в объединении множеств $\mathfrak{A}$. Следовательно, из нашей комбинации вырастет не более одной $\mathfrak{A}$-комбинации, соответствующей невырожденной части $\mathfrak{A}$-разбиения.

Наконец, по Лемме 1 у каждого разделяющего множества из набора $\mathfrak{A}'$ имеется не более одной ближней части для A_n. Следовательно, существует не более одной "ближней" $\mathfrak{A}'$-комбинации, соответствующей невырожденной части $\mathfrak{A}'$-разбиения и не содержащей ни одной дальней части. Из такой части может вырасти не более a_n $\mathfrak{A}$-комбинаций, соответствующих невырожденным частям $\mathfrak{A}$-разбиения.

Таким образом, количество $\mathfrak{A}$-комбинаций, соответствующих невырожденным частям $\mathfrak{A}$-разбиения, превосходит количество невырожденных частей $\mathfrak{A}'$-разбиения не более, чем на $a_n - 1$. $\square$

Замечание. Если $k > 1$, то для любого набора $a_1, \ldots, a_n$ существуют граф и соответствующий этим числам набор $\mathfrak{A}$ разделяющих множеств, для которых количество невырожденных частей в разбиении в точности равно (3). Если $k = 1$, можно доказать более сильную оценку: в разбиении связного графа 1-разделяющими множествами будет не более $1 - n + \sum_{i=1}^{n} a_i$ невырожденных частей.

Определение 8. $\mathfrak{A}$-разбиение назовем *полным*, если оно делит граф на количество частей, вычисляемое по формуле (3).

Замечание. Из рассуждений в доказательстве Теоремы 2 следует, что если $\mathfrak{A}$-разбиение – полное, $a_n > 2$ и $n > 1$, то $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \setminus A_n$ тоже должно быть полным.

Как было доказано в работе [10, Теорема 6], если на граф и набор наложены специальные условия (граф должен быть слабо нерасщепимым и каждый представитель набора $\mathfrak{A}$ из n множеств должен быть зависим с каким-то разделяющим множеством графа), то в $\mathfrak{A}$-разбиении найдется не более $2n$ невырожденных частей. Этот результат является частным случаем только что доказанной Теоремы 2, так как, в силу [10, Лемма 6], при наложенных на граф и набор $\mathfrak{A}$ условиях каждое множество $\mathfrak{A}$ режет граф на две части.

5 Полные разбиения

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{A}$ – полное разбиение, $\mathfrak{A}' = \{A_1, \ldots, A_k\}$ – все его разделяющие множества, делящие граф на две части (т.е. $a_1 = \ldots = a_k = 2$). Тогда $\mathfrak{A}'$-разбиение тоже полное, т.е. в нем $2k$ частей.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по $n - k$, где $n = |\mathfrak{A}|$. База $n = k$ очевидна. Переход: применим сначала замечание к теореме 1 (т.е. выкинем A_n из $\mathfrak{A}$), затем индукционное предположение. $\square$

Определение 9. Назовем пару разделяющих множеств A, B *независимой*, если при B-разрезе все неудаленные вершины A оказались в одной компоненте связности. В противном случае будем называть ее *зависимой* с B.

В работах [8, 9] показано, что отношение независимости симметрично. Далее мы будем просто писать, что A и B независимы (зависимы).

Теорема 4. *Пусть набор $\mathfrak{A}$ дает полное разбиение. A – одно из множеств этого набора – режет граф на $a > 2$ частей. Тогда A независимо со всеми остальными множествами $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Возьмем произвольное множество B из $\mathfrak{A}$, отличное от A. Будем изучать разбиение графа набором $\{A, B\}$. Пусть $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \setminus A$. Мы будем пользоваться стандартными обозначениями клеточного языка.

Убедимся, что хотя бы одна из b частей B-разреза – ближняя к A. Если бы все части были дальними, то из каждой $\mathfrak{A}'$-комбинации (соответствующей невырожденной части) вырастет не более одной невырожденной части $\mathfrak{A}$, что противоречит полноте $\mathfrak{A}$-разбиения. Не умаляя общности можно считать, что Q_1 – ближняя. Тогда каждая внутренняя клетка в первой строке (соответствующей $Q_1 \setminus B$) невырождена. Действительно, в противном случае из "ближней"

$\mathfrak{A}'$-комбинации вырастет не более $a-1$ невырожденной части $\mathfrak{A}$-разбиения. Если же "ближней" $\mathfrak{A}'$-комбинации нет, то в $\mathfrak{A}$-разбиении невырожденных частей будет не больше чем в $\mathfrak{A}'$-разбиении. В любом случае, приходим к противоречию с условием полноты.

Докажем еще один необходимый факт: в нашей таблице есть хотя бы одна непустая внутренняя клетка вне первой строки. Рассмотрим $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A} \setminus B$. Если бы сформулированный факт не был верен, то из каждой части $\mathfrak{A}''$-разбиения выросло бы не более одной невырожденной части $\mathfrak{A}$-разбиения (во все $\mathfrak{A}''$-комбинации пришлось бы добавлять только Q_1, чтобы получить невырожденную часть). Мы вновь получили противоречие с условием полноты, так как формула (3) показывает, что в $\mathfrak{A}''$-разбиении должно быть хотя бы на одну часть меньше. Не умаляя общности, будем считать, что найденная непустая внутренняя клетка – $(2,1)$.

Теперь рассмотрим, по каким крайним клеткам "разошлись" вершины A и B. Воспользуемся Предложением 2 в клеточной форме:

$$g_{00}+g_{10}+g_{01} \geq k, \quad g_{00}+g_{10}+g_{02} \geq k, \quad g_{00}+g_{10}+g_{03} \geq k$$

$$g_{00}+g_{20}+g_{01} \geq k.$$

Кроме того, исходя из размеров A и B, получаем

$$g_{00}+g_{10}+g_{20} \leq k \quad \text{и} \quad g_{00}+g_{01}+g_{02}+g_{03} \leq k.$$

Из этих двух серий неравенств сразу получим $g_{00}+g_{10} = k$, следовательно, все вершины A лежат в части B-разреза Q_1, то есть A и B – независимы. $\square$

6 Оценка количества частей в разрезе графа одним множеством

Теперь обратимся к вопросу: как оценить количество частей в разрезе k-связного графа одним разделяющим множеством?

Теорема 5. *Пусть A и B – зависимые разделяющие множества k-связного графа, $p \geq 2$ и степени всех вершин из множеств A и B не меньше $k(p+2)/(p+1)$. Тогда каждое из них делит граф не более чем на p частей.*

Доказательство. Докажем утверждение теоремы от противного: предположим, что в A-разрезе не меньше $p+1$ части. Будем вести рассуждения на клеточном языке. Докажем методом от противного, что в таблице для A и B не может быть двух непустых внутренних клеток, лежащих одновременно и в разных столбцах, и в разных строках. Предположим, такие нашлись. Не умаляя общности можно считать, что это клетки $(1,1)$ и $(2,2)$. Тогда по Предложению 2 в клеточной форме:

$$g_{00} + g_{01} + g_{10} \geq k \qquad g_{00} + g_{02} + g_{20} \geq k \tag{4}$$

Исходя из размеров A и B, получаем

$$g_{00} + g_{10} + g_{20} \leq k \qquad g_{00} + g_{01} + g_{02} \leq k. \tag{5}$$

Мы предположили, что A делит граф на $p+1$ часть, значит не меньше чем на три части. Рассмотрим третью часть P_3. Из неравенств (4) и (5) следует, что $g_{03} = 0$, следовательно в третьем столбце есть непустая внутренняя клетка $(j,3)$. Тогда по Предложению 2 в клеточной форме $g_{00} + g_{j0} \geq k$, откуда немедленно следует, что все вершины A лежат в Q_j. Получается противоречие с зависимостью A и B. Итак, все вершины графа, кроме $A \cup B$, лежат или в какой-то одной строчке, или в каком-то столбце. Разберем оба случая.

Если все вершины какой-то i-ой строчки лежат в крайней клетке $(i,0)$, то

$$g_{i0} > k/(p+1). \tag{6}$$

Действительно, вершины этой клетки могут быть соединены только с другими вершинами этой клетки и с вершинами B. Если бы выписанное неравенство не выполнялось, вершины этой клетки имели бы степени не выше $k + k/(p+1) - 1$, что противоречит условию. Аналогично, верен соответствующий факт для столбцов.

Итак, рассмотрим случай, когда все непустые внутренние клетки лежат в одной строке (скажем, в первой). Сюда же отнесем случай, когда непустых клеток нет вовсе. Согласно (6), верно $g_{20} > k/(p+1)$, откуда $g_{00} + g_{10} < k - k/(p+1)$. Тогда если в j-ом столбце есть непустые внутренние клетки, то это может быть только клетка $(1,j)$, и по Предложению 2 выполнено $g_{0j} > k/(p+1)$. Если же их нет, то неравенство $g_{0j} > k/(p+1)$ выполнено согласно (6). Суммируя эти неравенства по всем клеткам нулевой строки, приходим к противоречию с тем, что в множестве B только k вершин.

Теперь рассмотрим случай, когда все непустые внутренние клетки (и их не меньше одной) лежат в первом столбце. Согласно неравенству (6), верно $g_{0i} > k/(p+1)$ при всех $i > 1$. Следовательно, $g_{01} + g_{00} < k/(p+1)$. Не умаляя общности будем считать, что в первом столбце непустой оказалась клетка $(1,1)$. По Предложению 2 в клеточной форме $g_{10} > k - k/(p+1)$. Если клетка $(2,1)$ пуста, то по неравенству (6) выполнено $g_{20} > k/(p+1)$. Если она непуста, то как и в случае с клеткой $(1,1)$, получаем, что $g_{20} > k - k/(p+1)$. В любом случае, приходим к тому, что размер A больше k. Противоречие. $\square$

Следствие 1. *Пусть степени всех вершин графа не меньше, чем* $k(p+2)/(p+1)$, *и каждый представитель набора* $\mathfrak{A}$ *из* n *множеств зависим с каким-то разделяющим множеством графа. Тогда в* $\mathfrak{A}$*-разбиении будет не больше* $2n$ *невырожденных частей при* $p = 2$ *и не более* $pn - n + 1$ *невырожденных частей в случае* $p > 2$.

Доказательство. По Теореме 5, каждое множество набора $\mathfrak{A}$ режет граф не более чем на p частей. Отсюда по Теореме 2 и получается необходимая оценка. $\square$

Замечание. Из результатов работы [10] вытекает частный случай этого следствия при $p = 2$, но при более грубой нижней оценке на степени вершин: $3k/2$ против доказанной в этой статье $4k/3$.

Список литературы

[1] Ф. Харари. *Теория графов.* Москва, "Мир", 1973. (Перевод с английского. F. Harary, *Graph theory,* 1969.)

[2] О. Оре. *Теория графов.* Москва, "Наука", 1968. (Перевод с английского. O. Ore, *Theory of graphs,* 1962.)

[3] D. W. Matula. *k-Blocks and ultrablocks in graphs.* J. Comb Theory, ser. B, **24**, 1978, p. 1-13.

[4] F. Harary, Y. Kodama. *On the genus of an n-connected graph.* Fund. Math., **54**, 1964, p. 7-13.

[5] S. MacLane. *A structural characterization of planar graph.* Duke Math. J., **3**, 1937, p. 460-472.

[6] W. T Tutt. *Connectivity in graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.

[7] J. E. Hopcroft and R. E. Tarjan. *Dividing a graph into triconnected components.* SIAM J. Comput., **2**, 1973, p. 135-158.

[8] W. Hohberg. *The decomposition of graphs into k-connected components.* Discr. Math., **109**, 1992, p. 133-145.

[9] Д. В. Карпов, А. В. Пастор. *О структуре k-связного графа.* Записки научных семинаров ПОМИ, **266**, 2000, стр. 76-106.

[10] Д. В. Карпов. *Блоки в k-связном графе.* Записки научных семинаров ПОМИ, **293**, 2002, стр. 59-93.

[11] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. *Конкретная математика.* Москва, "Мир", 1998.

[12] K. E. Iverson. *A Programming language.* Wiley, 1962.